



TITLE:

熱対向流量子乱流の数値解析: 量子渦の再結合の統計的性質 (オイラー方程式の数理解析: 力学と変分原理250年)

AUTHOR(S):

足立, 洋之

---

CITATION:

足立, 洋之. 熱対向流量子乱流の数値解析: 量子渦の再結合の統計的性質 (オイラー方程式の数理解析: 力学と変分原理250年). 数理解析研究所講究録 2011, 1749: 92-101

ISSUE DATE:

2011-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/171101>

RIGHT:

# 熱対向流量子乱流の数値解析；量子渦の再結合の統計的性質

足立 洋之

Hiroyuki Adachi

大阪市立大学院理学研究科

Department of Physics, Osaka City University

## 1 導入

超流動  $^4\text{He}$  や  $^3\text{He}$  において実現される量子流体现象、特に量子乱流 [1] は低温物理学分野において現在盛んに研究が行われている現象の一つであるが、その歴史は約 50 年前に遡る。1955 年、Feynman は循環が  $\kappa = h/m$  ( $h$ : プランク定数、 $m$ :  $^4\text{He}$  原子の質量) で量子化された量子渦糸、またそれが複雑に絡まった量子乱流の存在を予言し [2]、その後 Vinen による実験で初めてそれが観測された [3]。このとき Vinen が量子乱流を観測するために用いたのが熱対向流である。以来、熱対向流は量子乱流を研究する上で非常に重要な役割を担ってきた。この熱対向流という不思議な現象は有限温度の超流動流体が、粘性、エントロピーを持たない超流動成分 (密度  $\rho_s$ 、流速  $\mathbf{v}_s$ ) と、逆にそれらを持つ常流動成分 (密度  $\rho_n$ 、流速  $\mathbf{v}_n$ ) の独立した二成分からなるとする二流体モデルで説明される [4]。一端を閉じ、他端は超流動  $^4\text{He}$  の槽につながる管を用意し、閉じた端からヒーターを用いて熱を注入し温度勾配を作る。このときエントロピーを持つ常流体は熱輸送のため高温側から低温側へ流れる。反対に超流体は全流束  $j = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n = 0$  のために、低温側から高温側へ流れる。熱対向流において、超流体と常流体の相対流速が比較的遅い時には二流体は独立に流れることができるが、ある臨界相対速度を超えると二流体が独立に流れなくなり、ある種の摩擦のようなものが生じる。これを相互摩擦と呼び、Vinen はこの相互摩擦力が量子渦と常流体との相互作用によるものであることを明らかにした [3]。つまり、熱対向流においてある臨界相対速度を超えると、もともと超流動流体に存在していた量子渦 (残留渦) が常流体との相互摩擦により引き伸ばされ、それが複雑にからまるこ

とで量子乱流へと転移する。

さらに Vinen は一様な熱対向流中の乱流を仮定することで、渦糸長密度  $L$  (単位体積当たりの渦糸の長さ) の時間発展方程式を

$$\frac{dL}{dt} = \alpha\chi_1|\mathbf{v}_{ns}|L^{3/2} - \chi_2\frac{\kappa}{2\pi}L^2 \quad (1)$$

と理論的に導いた [3]。ここで、 $\alpha$ 、 $\chi_1$ 、 $\chi_2$  は温度に依存するパラメータである。右辺第一項は相互摩擦による渦へのエネルギー注入から、第二項は渦同士の再結合によるエネルギー散逸から求められ、それぞれ渦糸長密度の成長と減衰を表す。この両者が拮抗するところで、熱対向流量子乱流の統計的な定常状態が実現する。定常状態では渦糸長密度は時間変化しないので、式 (1) の左辺をゼロと置くと、

$$L = \gamma^2 v_{ns}^2 \quad (2)$$

が得られる。 $\gamma$  は温度に依存するパラメータである。この定常状態での渦糸長密度の関係式は多くの熱対向流の実験で観測されている [5]。この Vinen による熱対向流の一連の研究の後、膨大な実験研究がおこなわれた。しかし、量子渦の運動は非線形および非局所的であるため、観測結果を量子渦の運動から直接理解することはできなかった。

この状況を打破したのが Schwarz である。Schwarz は渦糸法を用いて量子渦糸の 3 次元ダイナミクスの直接数値シミュレーションを行い、熱対向流で観測される渦糸長密度  $L$  を相対速度  $v_{ns}$  および温度の関数として求め、実験結果と定量的一致を得た [6]。(実は Schwarz の数値計算には重大な欠陥があり、その点で熱対向流量子乱流の定常状態のシミュレーションに成功したのは本稿の研究が初めてである。) 本稿では、熱対向流量子乱流の定常状態の渦糸法を用いた数値シミュレーションを行い、それから得られた統計量などを実験と比較しながら紹介する。

量子渦の再結合は量子乱流のミクロな視点からの理解において非常に重要である。なぜなら量子乱流の減衰、エネルギー散逸の機構の多くは再結合に起因するものが多いからである。いくつかの例をあげると、再結合による相互摩擦を介した渦糸長の減衰 [7]、再結合による音波の放出 [8, 9]、再結合によるケルビン波の励起 [10, 11, 12] などが知られている。近年 Maryland 大学の実験グループは水素固体粒子を用いた PIV (Particle Image Velocimetry) を熱対向流量子乱流の減衰過程で行うことで、量子渦とそれらが再結合する様子を可視化することに成功した [13]。その実験では再結合時の渦間の最短距離  $\delta(t)$  の時間発展を個々の再結合イベントについて解析したところ、多くの再結合イベントで  $\delta(t) \propto (\kappa t)^{1/2}$  の関係が見られることが分かった。簡単な理解としては、循環量子  $\kappa$  を用いた次元解析として求められる。つまり量子渦再結合において循環量子  $\kappa$  が支配的な役

割を担っていることを示している。この性質は連続的に循環の値が変わる古典流体中の渦では確認できないもので、量子渦特有のものだと言える。我々は熱対向流量子乱流定常状態の数値シミュレーションにおいて実験同様、個々の再結合イベントにおいて最短渦間距離  $\delta(t)$  を計算し、その統計解析を行った。本稿ではその結果について述べる。

## 2 渦糸法の方程式

渦糸法は、文字どおり、量子渦を循環のそろった渦糸として扱う。「糸」とはその芯の内部構造を無視することを意味する。超流動  $^4\text{He}$  の場合、渦芯は原子サイズで、渦のダイナミクスに現われるどのスケールよりもはるかに小さい。渦がその周囲につくる超流動速度場は Biot-Savart 則によって表され、それを他の渦が感じて運動する。渦糸法は、古典流体力学の分野で古くから研究され、いまでもなお、数理的には非常に興味深い対象である。しかし、古典流体の場合は、渦糸法はトイ・モデル (toy model) であることは否めない。古典粘性流体中では、それぞれの渦は、循環を一定に保たず、生成および消滅を繰り返すからである。ところが、超流動中の量子渦はこれらとは異なり、安定な位相欠陥として振舞う。そのため、量子渦糸という描像が現実的となる。

ヘルムホルツの定理により、量子渦は絶対零度ではその渦上の点での超流動速度で運動する。なので渦糸法では渦上に誘起する超流動速度場を求め、渦の運動を計算する。量子渦上の点  $\mathbf{s}$  につくる超流動速度場は Biot-Savart 則で

$$\mathbf{v}_\omega = \frac{\kappa}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}) \times d\mathbf{s}_1}{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}|^3} \quad (3)$$

と表される。ここで  $\xi$  は渦糸に沿った 1 次元座標である。積分は、この 1 次元座標に沿った線積分を意味する。しかしながら、この Biot-Savart 積分は  $\mathbf{s}_1 \rightarrow \mathbf{r}$  で発散する。そのため、 $\mathbf{r}$  を渦糸上の点の座標  $\mathbf{s}$  で置き換えて、 $\mathbf{s}_1$  近傍の寄与と、それより遠方の寄与に分けると Biot-Savart 則は

$$\mathbf{v}_\omega = \frac{\kappa}{4\pi} \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' \ln \left( \frac{2(l_+ l_-)^{1/2}}{e^{1/4} a_0} \right) + \frac{\kappa}{4\pi} \int'_{\mathcal{L}} \frac{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}) \times d\mathbf{s}_1}{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}|^3} \quad (4)$$

と近似することができる ( $l_+$ ,  $l_-$  は点  $\mathbf{s}$  の隣の 2 点とつながる線要素)。 $\mathbf{s}'$  は点  $\mathbf{s}$  での渦度の方向を向いた単位接線ベクトルで、 $\mathbf{s}''$  は  $\mathbf{s}'$  に垂直な法線方向のベクトルで、その場所の曲率半径  $R$  の逆数の大きさをもつ。積分上端のダッシュは  $\mathbf{s}$  近傍を除くことを意味する。式 (4) 第一項を局所項、局所誘導速度といい、第二項を非局所項と呼ぶ。この 2 つの Biot-Savart の寄与のうち、比較的小さいと思われる非局所項を無視した近似を局所

誘導近時 (LIA, Localized Induction Approximation) と呼ぶ。第一章の導入において、Schwarz の熱対向流量子乱流の数値計算には重大な欠陥があると述べたが、その一つがこの局所誘導近似を用いていることである [6]。Schwarz は周期境界条件下において局所誘導近似を用いて対向流量子乱流の数値計算を行ったが、時間と共に次第に渦が対向流相対速度  $\mathbf{v}_{ns}$  と垂直な方向に揃いだし、複雑に量子渦が絡まりあった乱流の定常状態が維持できないことを述べている [6]。Schwarz が用いた局所誘導近似とは異なり、我々が本研究で用いた full Biot-Savart 則は非局所項も含めて計算する手法である。後にも述べるが、この full Biot-Savart 則による熱対向流量子乱流の数値計算は定常状態を維持し続けることができる。

絶対零度での渦糸の方程式はこの Biot-Savart の二項を用いて

$$\dot{\mathbf{s}}_0 = \frac{\kappa}{4\pi} \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' \ln \left( \frac{2(l_+ l_-)^{1/2}}{e^{1/4} a_0} \right) + \frac{\kappa}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}) \times d\mathbf{s}_1}{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}|^3} + \mathbf{v}_s \quad (5)$$

となる。 $\mathbf{v}_s$  は熱対向流なので印加される超流動速度場である。さらにこの式を有限温度に発展させることができる。非圧縮完全流体中を渦度をもった物体が運動するときのは、マグナス力がかかる。量子渦糸の場合、マグナス力は、

$$\mathbf{f}_M = \rho_s \kappa \mathbf{s}' \times (\dot{\mathbf{s}} - \mathbf{v}_s) \quad (6)$$

で、 $\dot{\mathbf{s}}$  は点  $\mathbf{s}$  における渦糸の速度である。これと実験で観測された相互摩擦力 ( $\alpha$ 、 $\alpha'$  は温度に依存する係数)

$$\mathbf{f}_D = -\alpha \rho_s \kappa \mathbf{s}' \times [\mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)] - \alpha' \rho_s \kappa \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \quad (7)$$

とで運動方程式を立てると

$$m_{eff} \frac{d^2 \mathbf{s}}{dt^2} = \mathbf{f}_M + \mathbf{f}_D \quad (8)$$

となる。超流動成分が排除された渦芯の有効質量は、渦芯の半径を  $a$  とすれば、 $\rho_s a^2$  のオーダーであり、 $a$  が十分小さいため、この運動方程式で慣性項は無視される。こうして得られる  $\mathbf{f}_M + \mathbf{f}_D = 0$  を  $\dot{\mathbf{s}}$  について解くことにより、

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}}_0 + \alpha \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \dot{\mathbf{s}}_0) - \alpha' \mathbf{s}' \times [\mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \dot{\mathbf{s}}_0)] \quad (9)$$

を得る。これが我々が数値計算で解く渦糸の運動方程式である。

ここで量子乱流を特徴づける、いくつかの統計量について紹介しておく。量子乱流を特徴づける量のもっとも典型的なものが、渦糸長密度  $L$  で、先に述べたようにこれは単位体

積当たりの渦糸の長さとして記述される。次にあげられるのが、異方性パラメータで

$$I_{\parallel} = \frac{1}{\Omega L} \int_{\mathcal{C}} [1 - (\mathbf{s}' \cdot \hat{\mathbf{r}}_{\parallel})^2] d\xi \quad (10)$$

$$I_{\perp} = \frac{1}{\Omega L} \int_{\mathcal{C}} [1 - (\mathbf{s}' \cdot \hat{\mathbf{r}}_{\perp})^2] d\xi \quad (11)$$

と表される ( $\hat{\mathbf{r}}_{\parallel}$ ,  $\hat{\mathbf{r}}_{\perp}$  はそれぞれ、相対流速  $\mathbf{v}_{ns}$  に平行または垂直な単位ベクトル、 $\Omega$  は系のサイズ)。対称性により  $I_{\parallel}/2 + I_{\perp} = 1$  となる。もし渦糸タングルが等方的なら  $I_{\parallel} = I_{bot} = 2/3$ 、また渦糸タングルが完全に相対速度  $\mathbf{v}_{ns}$  と垂直な平面に並んでいる場合、 $I_{\parallel} = 1, I_{\perp} = 1/2$  である。これらの統計量は、発生した量子乱流がどのようなものかを読み解くための重要な手がかりとなる。

### 3 熱対向流量子乱流の定常状態の数値シミュレーション

我々は熱対向流相対速度  $\mathbf{v}_{ns}$  を加えた式 (9) を数値計算した。渦糸法では渦の生成は記述できないので、図 1(a) のように六つの渦輪を初期条件として配置して時間発展を追った。全ての計算において、全方向周期境界条件を用い、周期ボックスの一辺の長さ 0.1cm、空間分解能  $\Delta\xi = 8.0 \times 10^{-4}\text{cm}$ 、時間分解能  $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}\text{s}$  で計算を行った。図 1 に典型的な数値シミュレーションによる乱流の時間発展をのせた。最初単純な渦輪の

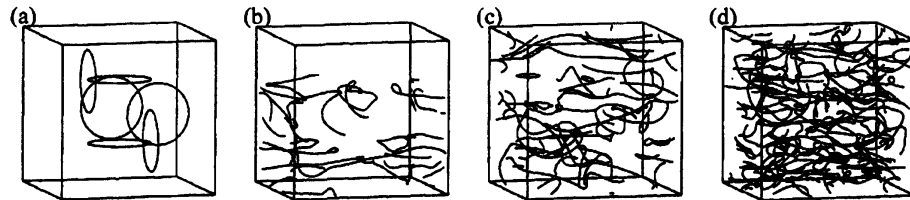


図 1 量子渦タングルの時間発展のシミュレーション。温度  $T = 1.9\text{K}$ 、 $|\mathbf{v}_{ns}| = 0.572\text{cm}$  で、 $\mathbf{v}_{ns}$  は Z 方向。(a) $t = 0\text{s}$ 、(b) $t = 0.5\text{s}$ 、(c) $t = 1.0\text{s}$ 、(d) $t = 3.0\text{s}$  である。

集合が相互摩擦によって、時間と共に成長し、渦同士再結合を起こして最終的には統計的な定常状態へ行き着く。図 2 で渦糸長密度と異方性パラメターの時間発展を示した。どちらの統計量も最初大きく変動するが、ある時間以降細かな振動をしながら、ほぼ一定の値を保っていることがわかる。我々は Schwarz の成し得なかった、全方向周期境界条件での熱対向流量子乱流の定常状態を得ることができたと言える。 また、定常状態での渦糸

T (K)	$\gamma_{num}(s/cm^2)$	$\gamma_{exp}$
1.3	53.5	60
1.6	109.6	90
1.9	140.1	130
2.1	157.3	150

表 1 我々の数値計算によるパラメータ  $\gamma_{num}$  と Childers & Tough[5] の実験により得られた  $\gamma_{exp}$  との比較。

長密度を、温度と相対速度を変えてプロットしたものが図 3 である。図を見て分かるように、我々の数値計算でも実験の観測事実と同じ  $L = \gamma^2 v_{ns}^2$  の関係を満たしていることがわかる。表 1 はパラメータ  $\gamma$  の実験値 [5] との比較である。我々が得た  $\gamma$  は定量的にほぼ一致している。

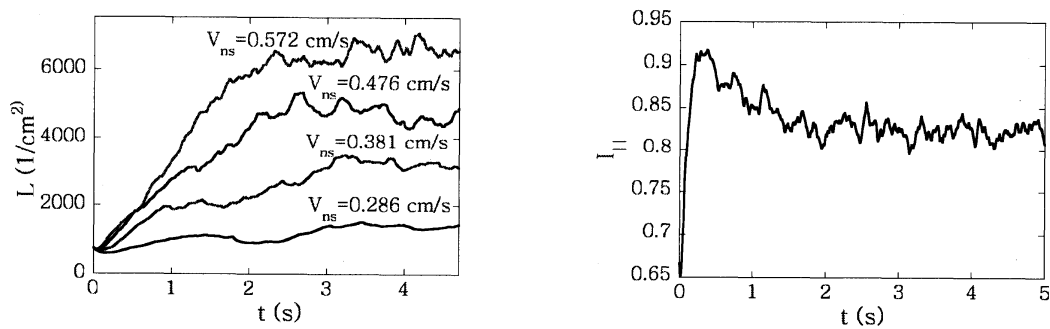


図 2 渦糸長密度  $L$  の時間発展 (左) と  $T = 1.9K$ 、 $v_{ns} = 0.572cm/s$  での異方性パラメータ  $I_{\parallel}$  の時間発展 (右)

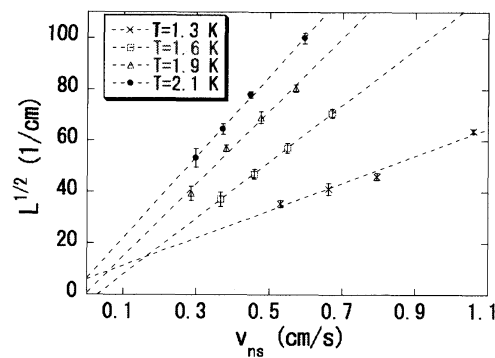


図 3 定常状態の渦糸長密度  $L$  の  $v_{ns}$  に対するプロット。エラーバーは標準偏差。

図4 (a) は、異方性パラメータ  $I_{\parallel}$  の対向流相対速度  $v_{ns}$  依存を表したグラフである。あらゆる温度において、異方性はほとんど相対速度依存性を示さない。この結果は Wang 等の実験結果と一致する [15]。また図4 (b) は異方性パラメータ  $I_{\perp}/I_{\parallel}$  の温度依存性である。高温になると相互摩擦の影響が大きくなり、渦は相対速度方向  $\mathbf{v}_{ns}$  と垂直な方向に引き伸ばされる傾向が強くなるので、異方性が大きくなる。高温側で若干の実験値とのずれはあるが、Wang 等の実験とよい一致をみることができる [15]。

熱対向流量子乱流の定常状態から求めた統計量は全て実験の値と定量的に一致することがわかった。つまり、我々は実験系の中で起こっている熱対向流量子乱流の数値シミュレーションに初めて成功したと言える。

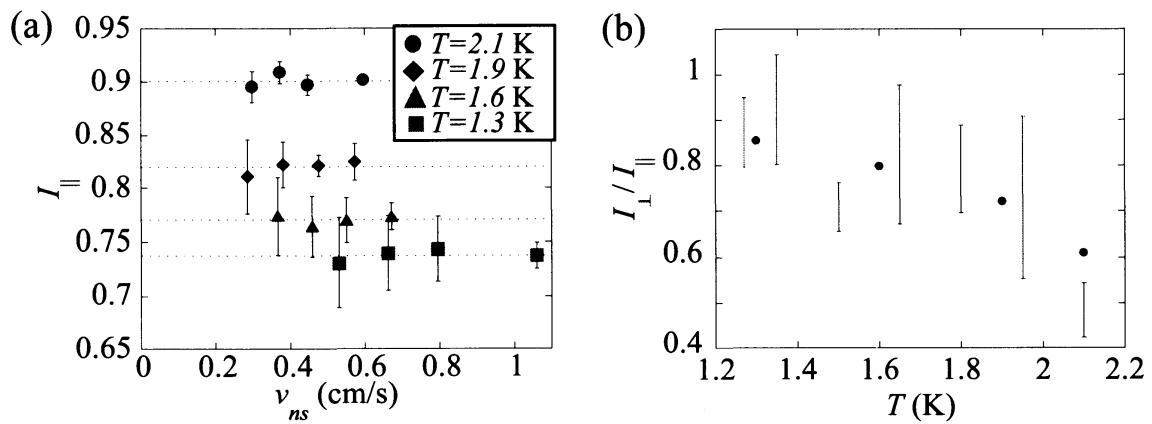


図4 (a) 異方性パラメータ  $I_{\parallel}$  の  $v_{ns}$  依存性。エラーバーは標準偏差。 (b) 異方性パラメータ比  $I_{\perp}/I_{\parallel}$  の温度依存性。青い点は我々の数値計算から求めた値。実線のエラーバーは Wang 等の実験から得られた値 [15]。

## 4 量子渦再結合の統計的性質

量子渦再結合は量子乱流の減衰メカニズムにとって非常に重要な現象であり、また量子乱流の異方性や渦糸長密度などを反映していると考えられる。我々は第三章で記述した、熱対向流量子乱流の定常状態の数値シミュレーション（温度  $T = 1.6$  K、相対流速  $v_{ns} = 0.37$  cm/s、渦糸長密度  $L \sim 3500$  cm $^{-2}$ ）の 353 回の再結合イベントにおいて再結合した 2 本の量子渦糸の最短距離  $\delta(t)$  を測定し、その統計的性質を調べた（図 5）。この解析方法は第一章で記述した Maryland 大学の実験グループが行った PIV による可視化実験とほぼ同じ解析方法である [13]。数値計算から得られた典型的な 5 回の再結合イベントにおける  $\delta(t)$  の時間発展を図 6 に示す。再結合量子渦間の距離  $\delta(t)$  は循環量子  $\kappa$  を用



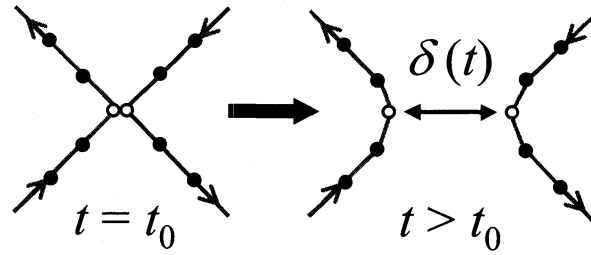


図5 渦糸法による量子渦再結合の概略図。白と黒の点はどちらも渦糸を形成する点であり、白の点は再結合した瞬間の二つの渦間の最短距離の点である。これらの点間の距離を  $\delta(t)$  と決め、それを追う。

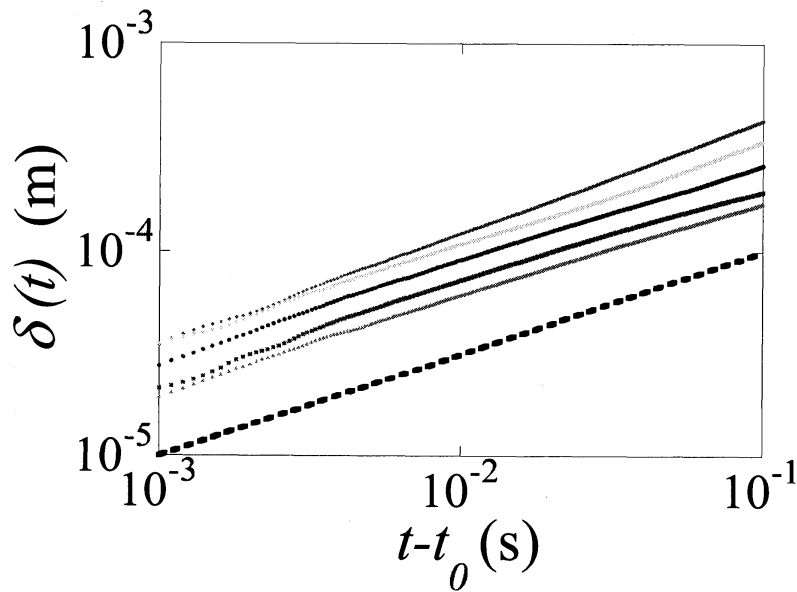


図6 典型的な5つの再結合イベントの  $\delta(t)$ 。黒の破線は  $\delta(t) = (\kappa|t - t_0|)$ 。

いた次元解析から

$$\delta(t) = A(\kappa|t - t_0|)^{1/2} \quad (12)$$

と予想される。ちなみにこの関係式は非線形シュレディンガー方程式の解析計算 [16]、渦糸法による数値計算 [17] でも確認されているが、どちらも絶対零度を仮定しており、初期条件として直線の渦糸、新円の渦輪を用いている。我々は上述の関係式が対向流量子乱流の定常状態でも実現されているか確認するために、式 (12) の時間  $t$  に関する一次の展開式である、

$$\delta(t) = A(\kappa|t - t_0|)^{1/2}(1 + c|t - t_0|) \quad (13)$$

を用いて個々の再結合イベントについてフィッティングを行い統計をとった。ここで  $c$  は  $\delta(t)$  が式 (12) からどれ程ずれているかを表すフィッティングパラメータである。

図 7 は上記の解析で得られた、フィッティングパラメータ  $c$  の確率密度分布で、この分布のピークは  $c \simeq 0$  となっていることがわかる。これは多くの再結合イベントで式 (12) 示したシンプルな形に従うこととし、これは Maryland 大学の実験結果と矛盾しない [13]。つまり有限温度の量子渦タングルの再結合においても循環量子  $\kappa$  は支配的なパラメータであることを示している。しかし  $c = 0$  以外の部分にも広く分布しており、これは再結合した渦以外からの Biot-Savart 速度場の影響と考えられる。この分布の広がりや再結合の異方性を詳しく解析することで、量子渦再結合から量子乱流の統計量である渦糸長密度やタングルの異方性の情報を抽出できる可能性があり、今後の課題である。

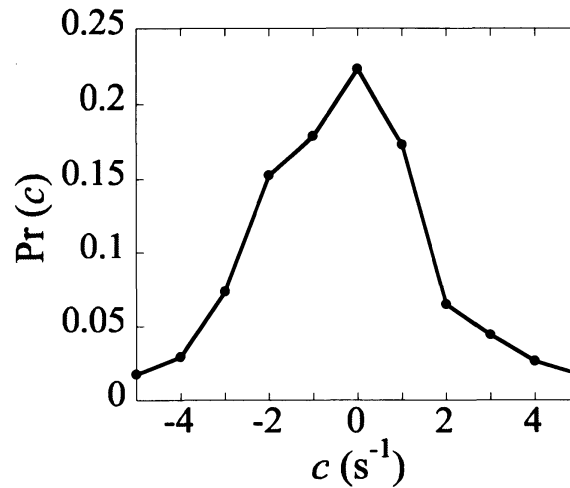


図 7 フィッティングパラメータ  $c$  の確率密度分布。

## 5 まとめと今後の展望

今回我々は熱対向流量子乱流の定常状態の数値計算に成功し、数値計算から得られた量子乱流を特徴づける統計量である渦糸長密度や異方性パラメータは実験の値と定量的な一致を見ることができた。今後この熱対向流量子乱流の数値計算を利用して、今まで未解決のままである熱対向流量子乱流の諸問題（高相対速度下での異なる乱流状態、統計量の系のサイズ依存性など）の解決に役立てたい。また我々は熱対向流量子乱流の数値計算中で発生する再結合について、再結合する二つの渦間距離  $\delta(t)$  に着目し  $\delta(t) = A(\kappa t)^{1/2}(1 + ct)$  を用いてフィッティングを行い統計をとった。パラメータ  $c$  の確率密度分布は  $c \simeq 0$  を

ピークとした広い分布を持ち、多くの再結合イベントで循環量子  $\kappa$  を用いた次元解析から単純に求められる  $\delta(t) = A(\kappa t)^{1/2}$  に従うことがわかった。今後、 $c = 0$  からの広い分布の原因を調べることで、量子渦再結合の統計から量子乱流の統計量である渦糸長密度や異方性の情報を抽出できる可能性がある。

## 参考文献

- [1] *Progres in Low Temperature Physics*, edited by W.P. Halperin and M. Tsubota (ELSEVIER, Amsterdam, 2008) Vol.XVI.
- [2] R. P. Feynman, in *Progres in Low Temperature Physics*, edited by C. J. Gorter (North-Holand, Amsterdam, 1955), Vol. I, p. 17.
- [3] W.F. Vinen, it Proc. Roy. Soc. A **240**, 114 (1957); W.F. Vinen, it Proc. Roy. Soc. A **240**, 128 (1957); W.F. Vinen, it Proc. Roy. Soc. A **242**, 493 (1957); W.F. Vinen, it Proc. Roy. Soc. A **243**, 400 (1957).
- [4] L.D. Landau and E.M. Lifshits, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press (1987).
- [5] J.T. Tough, in *Progress in Low Temperature Physics*, edited by D.F.Brewer (North-Holland, Amsterdam, 1982), Vol.VIII.
- [6] K.W. Schwarz, Phys. Rev. B **38**, 2398 (1988).
- [7] T. Lipniacki, Eur. J. Mech. B- Fluids **19**, 361 (2000).
- [8] S. Ogawa, M. Tsubota, and Y. Hattori, J. Phys. Soc. Jpn. **71**, 813 (2002).
- [9] M. Leadbeater, T. Winiecki, D. C. Samuels, C. F. Barengghi, and C. S. Adams, Phys. Rev. Lett. **86**, 1410 (2001).
- [10] W. F. Vinen, Phys. Rev. B **64**, 134520 (2001).
- [11] W. F. Vinen, J. Phys. Cond. Mater **17**, 3231 (2005).
- [12] P. A. Kuz'min, JETP Lett. **84**, 204 (2006).
- [13] M. S. Paoletti, M. E. Fisher, and D. P. Lathrop, Physica D: Nonlinear Phenomena. **239** 1367 (2010).
- [14] K.W. Schwarz, Phys. Rev. B **31**, 5782 (1985).
- [15] R. T. Wang, C. E. Swanson, and R. J. Donnelly, Phys. Rev. B **36**, 5246 (1987).
- [16] S. Nazarenko and R.J. West, J. Low Temp. Phys. **132**, 1 (2003)
- [17] A. T. A. M. de Waele and R. G. K. M. Aarts, Phys. Rev. Lett. **72**, 482 (1994).